Local splitting families of pencils of curves of genus two with automorphism groups (Fundamental Groups and Algebraic Functions)

荒川, 達也

数理解析研究所講究録
1182 巻 2001 年 63-72

Local splitting families of pencils of curves of genus two with automorphism groups

群馬高専　荒川 達也 (Tatsuya Arakawa)

1　はじめに

$\Delta \subset \mathbf{C}$ を原点のまわりの開円板とし, $f : S \to \Delta$ を種数 2 の極小曲線束とする. さらに, f が原点上にのみ特異ファイバー F をもつとき, f を種数 2 の退化族と呼ぶ.

Z. Chen [3] と 堀川 [4] は, 種数 2 の退化族について, それぞれ次のような問題を調べた:

問題 1　退化族 f の自己同型群 Aut$f$ を分類すること. また, 与えられた有限群を自己同型群に含む f を決定すること.

問題 2　(i) f の変形 $\{f_\alpha\}_\alpha$ により特異ファイバー F を "分裂" させること.
(ii) 分裂を持たない特異ファイバー (原子ファイバー) を分類すること.

本稿では, これらの研究をもとに次の問題を考える:

問題　与えられた有限群を自己同型群に含む退化族に対し,
(i) 群の作用を保つような特異ファイバーの分裂を構成すること.
(ii) 群の作用を保つような分裂を持たない特異ファイバー (群作用のもとでの原子ファイバー) を分類すること.

以下, §2 で問題 1, 2 に対する Chen 氏と堀川氏の結果について述べ, §3 で上の問題に対するいくつかの結果を述べる. また §4 では, ある群の作用のもとでの原子ファイバーについて, その群の部分群の作用を保つ分裂の例を構成する.

2　自己同型群と分裂族

この節では問題 1, 2 に対する Chen 氏 と堀川氏の結果について述べるが, そのためにまず, 退化族の特異ファイバーを記述するための堀川氏の方法を復習し, 次に特異ファイバーの不変量を 2 種類定義する.

2.1　特異ファイバーと不変量

2.1.1　特異ファイバーの表示

特異ファイバー F をもつ種数 2 の退化族 $f : S \to \Delta$ に対し, 次の事実が成り立つ:

命題　下の図式が可換となるような 正規曲面 S', 双有理写像 $S \to S'$, および 2 重被覆 $S' \to W = \mathbf{P}^1 \times \Delta$ が存在する:

$$\begin{array}{ccc} S & \to & S' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Delta & \leftarrow & W \end{array}$$

上の命題の 2 重被覆 $S' \to W$ に対し, $B \subset W$ をその分岐因子とすると, S' は正規だから B は 被約. さらに各ファイバー $\Gamma \subset W$ $(\Gamma = \mathbf{P}^1)$ に対し, $BF = 6$.

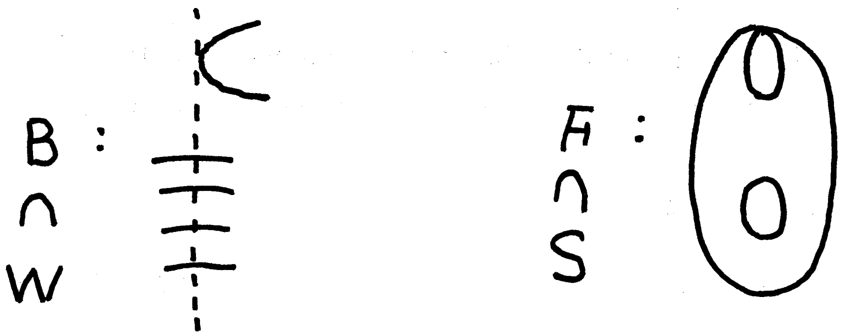
注意　S' は一意には決まらないが, B がなるべく簡単な形になるものを選ぶ.

以下の例で見るように B の形により特異ファイバー F の形が決定される. 従って $W = \mathbf{P}^1 \times \Delta$ 上の因子 B を指定することにより, 退化族 $f : S \to \Delta$ の特異ファイバーを表示することができる.

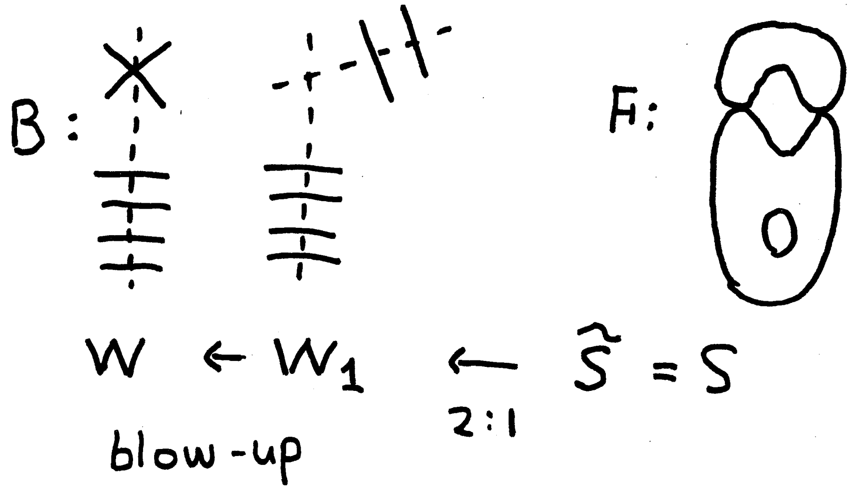
記号

$$W = \mathbf{P}^1 \times \Delta \text{ 上 } \begin{cases} \mathbf{P}^1 \uparrow \ \to \Delta \\ \cdots\cdots \not\subset B \\ \text{——} \subset B \end{cases}$$

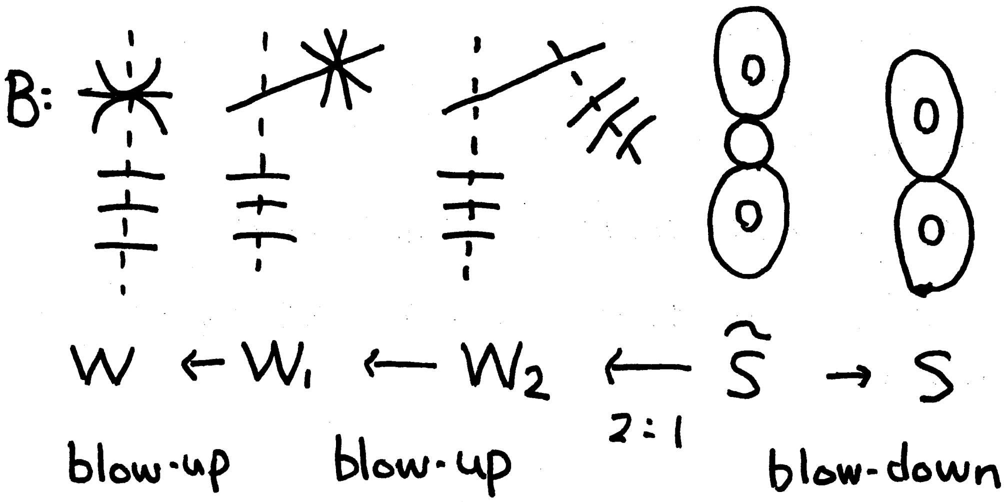
例 1



例 2 (B が特異点をもつ場合 I)



例 3 (B が特異点をもつ場合 II)



定義　例 2, 3 で見た S' の resolution $\tilde{S}$ を S' の canonical resolution と呼ぶ.

注意　例 3 で見たように, canonical resolution $\tilde{S}$ は minimal resolution とは限らないので, 極小曲線束 $f : S \to \Delta$ を得るためには何回か blow down を行う必要がある.

2.1.2　堀川指数とオイラー寄与

種数 2 の退化族 $S \to \Delta$ に対し, 特異ファイバー F の複雑さの指標となる二つの不変量を導入する.

定義 1　S' の canonical resolution $\tilde{S}$ に対し、$\tilde{S} \to S$ に含まれる blow down の数を F の堀川指数と呼び, $\mathcal{H}(F)$ と表す.

定義 2　$\mathcal{E}(F) := e(F) + 2$ を F のオイラー寄与と呼ぶ (e は位相的なオイラー数).

補題　特異ファイバー F に対し 常に $\mathcal{E}(F) \geq 1$.

例　例 1, 2, 3 の特異ファイバーに対し, それぞれ $(\mathcal{H}(F), \mathcal{E}(F)) = (0,1), (0,2), (1,1)$.

2.2　曲線束の自己同型群

S の複素多様体としての自己同型 $\sigma : S \to S$ が 条件 $f = f\sigma$ をみたすとき, σ は曲線束 f の自己同型であるという. Aut$f$ で f の自己同型全体からなる群を表す.

$\mathcal{G}$ を Aut$f$ の有限部分群とすると, f の非特異ファイバー X に対し自然に $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathrm{Aut}X$. X は種数 2 の代数曲線なので, 次の事実が成り立つ (cf. [5])：

命題　下の条件 (i), (ii) をみたす全射準同型 $\varphi : \mathcal{G} \to G$ が存在する：

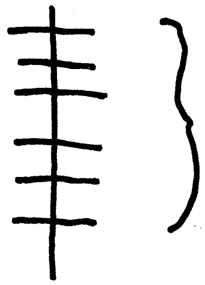
(i) Kerφ は高々 hyperelliptic involution から成る

(ii) G は $\mathbf{P}^1$ の有限自己同型群で、次のどれかに同型：

$$O_{24},\ T_{12},\ D_{12},\ D_8,\ D_6,\ D_4,\ Z_6,\ Z_5,\ Z_4,\ Z_3,\ Z_2,\ \{1\}.$$

Z. Chen [3] は, これらの群を自己同型群に含むような種数 2 曲線束の特異ファイバーの分類を与えた (cf.[3, §2]).

<u>例 1</u>　$G = O_{24}$ のとき, 分岐因子 B は次の形:

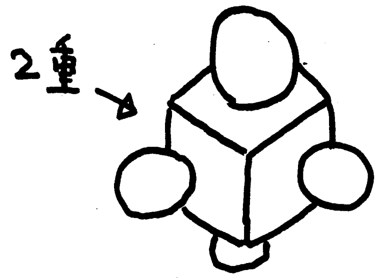


立方体($\cong \mathbf{P}^1$)の面の中心

対応する特異ファイバーは

$$F = 2D_0 + D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6$$

$$(D_j \cong \mathbf{P}^1)$$



<u>例 2</u>　$G = Z_6$ のとき, 分岐因子 B は次のどれか:

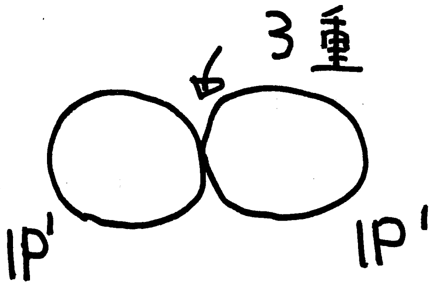
(i) $B : x^6 - t^k = 0$ $(k = 1, 2, 3)$.

(ii) $B : t(x^6 - t^k) = 0$ $(k = 0, 1, 2)$.

(x は $\mathbf{P}^1$ の, t は Δ の局所座標.)

<u>例</u>　(i) で $k = 1$ のとき, 対応する特異ファイバーは:

F :



2.3 特異ファイバーの分裂

曲線束 $f: S \to \Delta$ と特異ファイバー $F \subset S$ に対し、下の条件 (i), (ii) をみたす種数 2 曲線束 の族 $f_\alpha : S_\alpha \to \Delta$ $(\alpha \in U)$ を特異ファイバー F の分裂と呼ぶ ($U \subset \mathbf{C}$ は原点の開近傍で $\alpha \in U$ はパラメータ):

(i) $\alpha = 0$ のとき f_α は f と一致する.

(ii) $\alpha \neq 0$ に対し、f_α は l 本 $(l \geq 2)$ の特異ファイバーを持つ.

<u>定理 1</u> (cf. [1], [2], [4])

(i) 種数 2 曲線束の各特異ファイバーは、有限回の分裂により, 次の 2 種に還元される;

(a) F は node をひとつ持つ楕円曲線 $(\mathcal{E}(F) = 1, \mathcal{H}(F) = 0)$.

(b) $F = D_0 + D_1$ (D_1, D_2 は非特異楕円曲線で一点で transversal に交わる) $(\mathcal{E}(F) = 1, \mathcal{H}(F) = 1)$.

(a) (b)

<u>定理 2</u> (遠藤, 足利) 特異ファイバーの分裂 $F \to F_1 + \cdots + F_l$ に対し, 次の等式が成立する:

$$\mathcal{E}(F) = \mathcal{E}(F_1) + \cdots + \mathcal{E}(F_l),$$
$$\mathcal{H}(F) = \mathcal{H}(F_1) + \cdots + \mathcal{H}(F_l).$$

不変量の値と定理 2 から直ちに次が従う:

<u>系</u> 定理 1 の 2 種のファイバーはこれ以上分裂しない (種数 2 の原子ファイバー).

3 自己同型群を保つ分裂

<u>定義 1</u> 種数 2 の退化族 $f: S \to \Delta$ と $\mathrm{Aut}\mathbf{P}^1$ の有限部分群 G に対し, 自然な写像 $\mathcal{G} \to \mathrm{Aut}\mathbf{P}^1$ の像が G になるような $\mathrm{Aut}f$ の部分群 $\mathcal{G}$ が存在するとき, f は G- 退化族であ

るという.

定義 2　G- 退化族 $f : S \to \Delta$ と f の分裂

$$F : \mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in U} S_\alpha \to U$$

に対し, 次のふたつの条件をみたすような, G に対応する部分群 $\mathcal{G} \subset \mathrm{Aut} f$ が存在するとき, F は f の G- 分裂であるという:

(i) $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathrm{Aut} F$.

(ii) $\alpha \in U$ ごとに $\mathcal{G} \hookrightarrow \mathrm{Aut} f_\alpha$.

我々は Chen 氏により分類された G- 退化族の各タイプに対し, 堀川氏による分裂の構成法を適用することにより§1 の問題に対する若干の結果を得た.

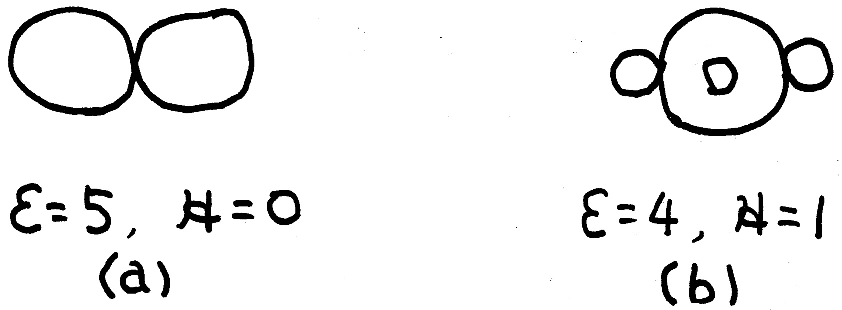
以下に, いくつか例を挙げる:

例 1　$G = Z_6$ のとき

(i) 各特異ファイバーは、有限回の分裂で次の 2 種にまで還元される:

(a) $F = D_0 + D_1$ (D_0, D_1 は非特異有理曲線で、一点で 3 重に交わる).

(b) $F = 2D_0 + D_1 + D_2$ (D_0 は非特異楕円曲線, D_1, D_2 は非特異有理曲線で, D_0 と D_1, D_0 と D_2 はそれぞれ一点で transversal に交わる).



(ii) 上の 2 種は、Z_6 の作用を保つ分裂を持たない.

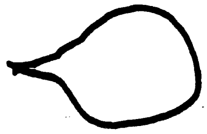
例 2　$G = Z_5$ のとき

(i) 各特異ファイバーは、有限回の分裂で次の 3 種にまで還元される:

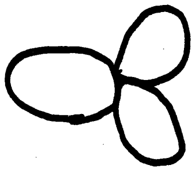
(a) F は (2,5)-cusp をひとつ持つ有理曲線.

(b) $F = D_0 + D_1 + D_2$ (D_0, D_1, D_2 は一点で会する非特異有理曲線で、$D_0D_1 = D_0D_2 = D_1D_2 = 1$).

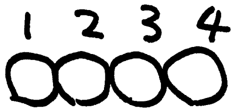
(c) $F = D_0 + 2D_1 + 3D_2 + 2D_3$ (D_0, D_1, D_2, D_3 は非特異有理曲線で, $D_0D_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = 1$ (その他の交点数はすべて 0)).



$\varepsilon = 4,\ \aleph = 0$
(a)



$\varepsilon = 6,\ \aleph = 0$
(b)

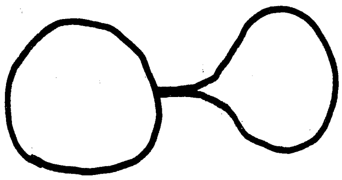


$\varepsilon = 7,\ \aleph = 1$
(c)

(ii) 上の 3 種は, Z_5 の作用を保つ分裂を持たない.

例 3　$G = Z_4$ のとき
各特異ファイバーは, 有限回の分裂で次の 1 種類のファイバーに還元される：

(a) $F = D_0 + D_1$ (D_0, D_1 は一点で交わる有理曲線で, D_0 は非特異, D_1 は D_0 との交点に $(2,3)$-cusp を持つ).



$\varepsilon = 5,\ \aleph = 0$

4　部分群を保つ分裂の例

$G \subset \mathrm{Aut}\mathbf{P}^1$ を有限部分群とし, $f : S \to \Delta$ を特異ファイバー F の G- 退化族とすると, 任意の部分群 $H \subset G$ に対し f は H- 退化族にもなっている.

そこで, 次の問題を考える:

問題　G- 原子ファイバー $f : S \to \Delta$ の H- 分裂を構成すること

より一般に

問題'　部分群の列

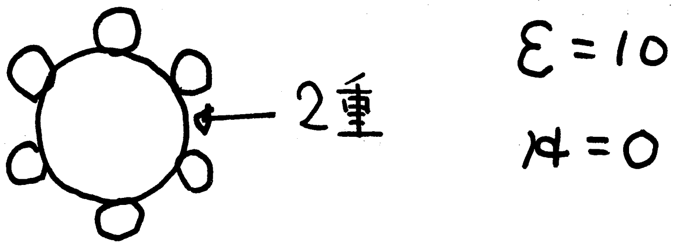
$$G \supset G_1 \supset G_2 \supset \cdots$$

に対応する分裂の列を構成すること.

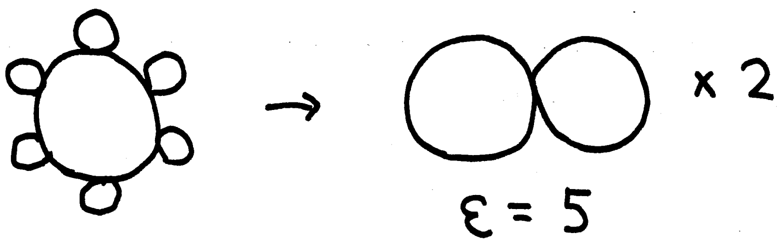
以下, ひとつの例について観察する:

<u>例</u>　$D_{12} \supset Z_6 \supset Z_3 \supset \{1\}$:

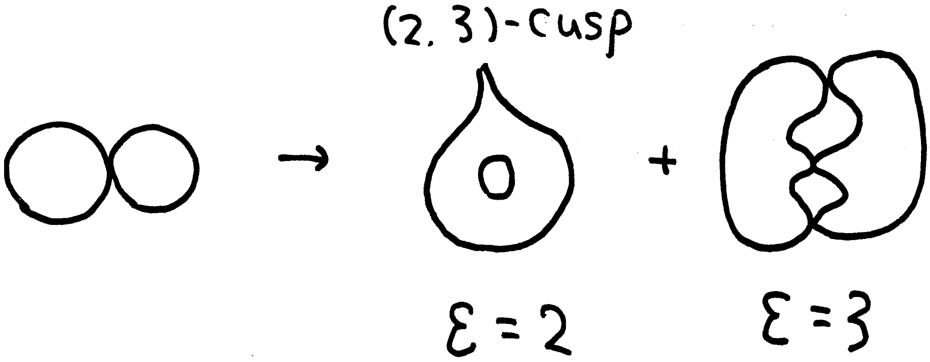
(i) D_{12}- 退化は次の 1 種類のみ:



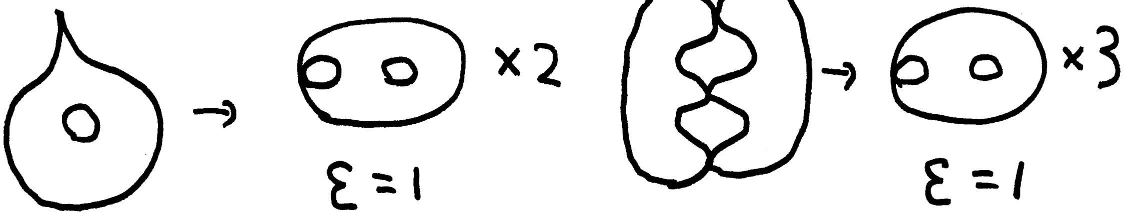
(ii) (i) の D_{12}- 退化は次のように Z_6- 原子ファイバーに Z_6- 分裂する:



(iii) (ii) で現れた Z_6- 原子ファイバーは, 次のように Z_3- 原子ファイバーに Z_3- 分裂する:



(iv) (iii) で現れた 2 種の Z_3- 原子は, それぞれ次のように種数 2 の原子ファイバーに分裂する:



参考文献

[1] T. Arakawa and T. Ashikaga, Local splitting families of pencils of hyperelliptic curves I, preprint

[2] T. Arakawa and T. Ashikaga, Local splitting families of pencils of hyperelliptic curves II, in prepation

[3] Z. Chen, Bounds of automorphism groups of genus 2 fibrations, Tôhoku Math. J. 46 (1994), 499–521.

[4] Local deformation of pencils of curves of genus two, Proc. Japan. Acad. Ser. A Sect IA Math. 28 (1988), 241–244.

[5] R. Tsuji, On conformal mapping of a hyperelliptic Riemann surface onto itself, Kōdai Math. Sem. Rep. 10 (1958), 1–23.

DEPARTMENT OF INFORMATION AND COMPUTER ENGINEERING
GUNMA NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY
580 TORIBA MAEBASHI GUNMA 371-8530
JAPAN

E-mail address: arakawa@ice.gunma-ct.ac.jp